

Simulation bidimensionnelle de phénomènes de convection naturelle et forcée en formulation primitive

MICHEL ROBICHAUD et J.-CLAUDE METHOT

Département de Génie chimique, Université Laval, Québec, QC, Canada G1K 7P4

et

MARC DUPUIS et EDGAR DERNEDDE

Centre de Recherche et de Développement Arvida, C.P. 1250 (Secteur Arvida), Jonquière, QC, Canada G7S 4K8

La simulation numérique en deux dimensions de la circulation de l'air, du profil de température et de pression pour des phénomènes de convection naturelle et forcée a été réalisée grâce à une méthode hybride aux différences finies basée sur la méthode MAC et utilisant la formulation $\psi-\omega$. Trois problèmes différents ont été résolus: (i) convection forcée dans une enceinte fermée; (ii) convection naturelle dans une enceinte fermée; et (iii) convection naturelle et forcée dans une enceinte avec ouvertures et sources chaudes localisées. Les résultats sont comparés à la littérature pour les deux premiers problèmes et à des résultats expérimentaux obtenus avec une maquette pour le troisième problème.

The air circulation, and the temperature and pressure profiles were simulated in two dimensions using a hybrid finite difference method which combines the MAC method and the stream function/vorticity approach. Three different flow problems were solved: (i) forced convection in a closed cavity; (ii) natural convection in a closed cavity; and (iii) forced and natural convection in a cavity with localised openings and hot sources. The results for the first two problems were compared to the literature and the results for the third problem were compared to data obtained from an experimental apparatus.

Mots clés: simulation, modélisation, convection, différences finies.

Revue de la littérature

Les problèmes de convection naturelle et forcée sont d'une grande importance pour la simulation des phénomènes physiques rencontrés en industrie. En différences finies, la simulation des phénomènes de convection naturelle et forcée a principalement été réalisée par l'utilisation de la formulation $\psi-\omega$. On peut citer parmi les exemples les plus connus Wilkes (1963), Todd (1969), Torrance et Rockett (1969) et Spalding et Afgan (1977).

Pour ce qui est des méthodes utilisant la formulation primitive, la plus employée est la méthode MAC (Harlow et Welch, 1965). Cette méthode a été utilisée pour résoudre des problèmes de surfaces libres, tout comme la méthode SMAC (Amsden et Harlow, 1970), dérivée de la méthode MAC. La méthode SMAC utilise en plus de la formulation primitive, une fonction potentielle qui lui permet d'imposer la condition d'incompressibilité.

Dans Roache (1982), une comparaison des formulations u, v, p et $\psi-\omega$ suggère l'emploi d'une méthode $\psi-\omega$ pour les raisons suivantes:

- i) une seule équation parabolique à résoudre au lieu de deux;
- ii) conditions aux limites de Dirichlet pour résoudre la fonction de courant au lieu de conditions aux limites de Neuman pour la pression;
- iii) maillage plus simple; et
- iv) meilleure représentation graphique avec lignes de courant.

À ces raisons, on peut ajouter que la méthode MAC ne respecte pas l'équation de continuité (divergence nulle) à haut nombre de Reynolds.

Par contre, le principal désavantage de la méthode $\psi-\omega$ réside dans la difficulté d'évaluer la vorticité aux limites (en

particulier dans les coins) (Harlow et Welch, 1965), difficulté qui s'accroît si on travaille en 3 dimensions (Agrebesola et Burley, 1977).

Pour résoudre les principaux problèmes de ces deux méthodes, soit le non-respect de l'équation de continuité pour la méthode MAC et la difficulté d'évaluer la vorticité aux limites pour la formulation $\psi-\omega$, les auteurs ont mis au point une méthode combinant la méthode MAC et la formulation $\psi-\omega$. Cette méthode ne nécessite pas l'évaluation de la vorticité aux limites et respecte la condition divergence nulle pour toute valeur des nombres de Reynolds et d'Archimède.

Les résultats obtenus par cette méthode appelée Laval University Marker and Cell (Lumac) ont été comparés à ceux obtenus par d'autres auteurs pour l'enceinte fermée et aux résultats expérimentaux pour le cas de l'enceinte ouverte.

Équations

Les équations différentielles adimensionnelles représentant un écoulement visqueux bidimensionnel par la méthode MAC sont:

Équation de continuité:

$$D_i = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \dots\dots\dots (1)$$

Vitesse horizontale:

$$\partial u / \partial \theta + \partial u^2 / \partial x + \partial uv / \partial y = [\partial (v_{eff} / \nu_o (\partial u / \partial x)) / \partial x + \partial (v_{eff} / \nu_o (\partial u / \partial y)) / \partial y] / Re - \partial P / \partial x \dots\dots\dots (2)$$

Vitesse verticale:

$$\begin{aligned} \partial v / \partial t + \partial v^2 / \partial y + \partial uv / \partial x \\ = [\partial (v_{eff} / \nu_o (\partial v / \partial x)) / \partial x \\ + \partial (v_{eff} / \nu_o (\partial v / \partial y)) / \partial y] / Re - \partial P / \partial y + Ar T \dots (3) \end{aligned}$$

Température:

$$\begin{aligned} \partial T / \partial t + \partial uT / \partial x + \partial vT / \partial y \\ = [\partial (v_{eff} / \nu_o (\partial T / \partial x)) / \partial x \\ + \partial (v_{eff} / \nu_o (\partial T / \partial y)) / \partial y] / Re Pr \dots (4) \end{aligned}$$

Pression:

$$\begin{aligned} \nabla^2 P = Sp = -(\partial^2 u^2 / \partial x^2 + 2\partial^2 uv / \partial x \partial y \\ + \partial^2 v^2 / \partial y^2) \dots (5) \end{aligned}$$

La formulation ψ - ω nous permet d'obtenir les équations suivantes:

$$\omega = \partial u / \partial y - \partial v / \partial x \dots (6)$$

$$v = \partial \psi / \partial x \dots (7)$$

$$u = -\partial \psi / \partial y \dots (8)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \dots (9)$$

Méthodes numériques

Les différentes équations sont résolues de la façon suivante:

- i) On calcule les vitesses et la température du pas de temps suivant de façon explicite de la même manière que dans la méthode MAC par les équations (2), (3) et (4).
- ii) Avec les vitesses obtenues en (i) on calcule la vorticité par l'équation (6).
- iii) On résout l'équation de Poisson pour la fonction de courant [équation (9)] avec la méthode de surrelaxation (SOR).
- iv) On recalcule alors les vitesses par les équations (7) et (8). Ces vitesses respectent maintenant la condition divergence nulle.
- v) On calcule le second membre de l'équation de pression (Sp) et on résout l'équation de Poisson pour la pression par la méthode SOR [équation (5)].
- vi) On retourne à (i).

Les équations pour le calcul des vitesses et de la température sont discrétisées de la même façon que dans la méthode MAC. Les termes de convection peuvent être discrétisés par différences centrées comme dans la méthode MAC (Roache, 1982) ou par l'utilisation de différenciation à l'amont afin de stabiliser le schéma numérique pour les problèmes de nature convective. Seul le dernier problème nécessitait l'emploi de cette technique. Le type de différenciation à l'amont utilisé est celui de la méthode "Donnor cell method" (Roache, 1982). On l'introduit de la façon suivante:

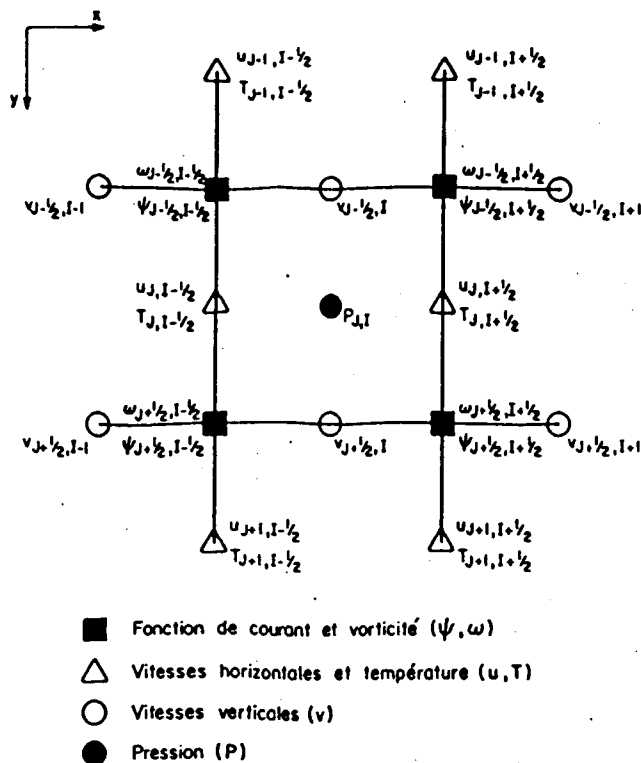


Figure 1 — Maillage et position des variables.

$$(\partial (u\Phi) / \partial x)_{j, i + 1/2} = (u_{1D}\Phi_D - u_G\Phi_G) / \Delta X \dots (10)$$

où: $u_G = (u_{j, i - 1/2} + u_{j, i + 1/2}) / 2$

$$u_D = (u_{j, i + 1/2} + u_{j, i + 3/2}) / 2$$

$$\Phi_D = \Phi_{j, i + 1/2} \quad \text{si } u_D > 0$$

$$\Phi_D = \Phi_{j, i + 3/2} \quad \text{si } u_D < 0$$

$$\Phi_G = \Phi_{j, i - 1/2} \quad \text{si } u_G > 0$$

$$\Phi_G = \Phi_{j, i + 1/2} \quad \text{si } u_G < 0$$

et où Φ représente la variable convectée, u la vitesse horizontale et les indices D et G , la droite et la gauche.

Le maillage utilisé (cf. figure 1) est identique à celui de la méthode MAC pour les vitesses et la pression sauf que des noeuds de vorticité et de fonction de courant ont été ajoutés aux coins des éléments. La vorticité peut ainsi se calculer (étape ii) de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \omega_{j - 1/2, i + 1/2} = (u_{j, i + 1/2} - u_{j - 1, i + 1/2}) / \Delta y \\ - (v_{j - 1/2, i + 1} - v_{j - 1/2, i}) / \Delta x \dots (11) \end{aligned}$$

La fonction de courant est obtenue par surrelaxation (SOR) (étape iii) avec des conditions aux limites de Dirichlet de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \psi_{j + 1/2, i + 1/2} = \psi_{j + 1/2, i + 1/2} + (F/2(R + 1)) \\ \times [\Delta y^2 \omega_{j + 1/2, i + 1/2} + \psi_{j + 3/2, i + 1/2} \\ + \psi_{j - 1/2, i + 1/2} + R(\psi_{j + 1/2, i + 3/2} + \psi_{j + 1/2, i - 1/2}) \\ - 2(R + 1) \psi_{j + 1/2, i + 1/2}] \dots (12) \end{aligned}$$

où $R = \Delta y^2 / \Delta x^2$ et $1 < F < 2$.

Les vitesses u et v sont ensuite recalculées (étape iv) de la façon suivante:

$$u_{j,i+1/2} = -(\psi_{j+1/2,i+1/2} - \psi_{j-1/2,i+1/2}) / \Delta y \quad (13)$$

$$v_{j+1/2,i} = (\psi_{j+1/2,i+1/2} - \psi_{j+1/2,i-1/2}) / \Delta x \quad (14)$$

Le second membre de l'équation de pression, S_p est alors calculé comme dans la méthode MAC en omettant les termes de divergence (Amsden et Harlow, 1970) devenus nuls. Ensuite, la pression est calculée par SOR avec des conditions aux limites de Newman à l'aide de l'équation déjà utilisée pour résoudre la fonction de courant [équation (14)].

Un problème de convergence a été noté en utilisant la méthode SOR étant donné les conditions aux limites de Newman. Les conditions aux limites variant, le niveau de la solution évolue constamment même si la solution de pression converge. Pour pouvoir mieux comparer la pression entre deux itérations, la solution est ramenée à un niveau donné après chaque itération. Cette technique nous a permis de fixer un critère de convergence efficace et d'obtenir le profil de pression désiré.

Finalement, pour tenir compte des conditions de turbulence dans le troisième problème étudié, un modèle de turbulence a été introduit. Ce modèle est basé sur le modèle "Longueur de mélange de Prandtl" et a été modifié pour tenir compte de la turbulence causée par la température. Ce modèle prend la forme suivante:

$$\nu_{\text{eff}} = \nu_0 (1 + \delta_{u,v} (Re_x^2 + Re_y^2)^{1/2} + \delta_T Gr (T - T_0)^4)$$

Géométries et conditions aux limites

Trois problèmes d'écoulement ont été étudiés, pour deux géométries différentes. La première géométrie employée a été une enceinte de section carrée. La deuxième géométrie est plus complexe (cf. figure 7). Il s'agit d'une enceinte comprenant quatre ouvertures, trois sur le plancher pour les entrées d'air (convection forcée) et un canal au plafond, constituant la seule sortie. Deux rectangles solides, placés de chaque côté de l'entrée centrale, constituent les sources de chaleur (convection naturelle) en plus de faire partiellement obstacle à l'écoulement de l'air. Dans ces géométries, des conditions aux limites sont imposées pour les différentes variables.

CAS NO 1: CONVECTION FORCÉE DANS UNE ENCEINTE FERMÉE ET CARRÉE

Dans ce problème, l'écoulement est induit par le déplacement horizontal de la paroi supérieure à une vitesse adimensionnelle $U = 1$.

-- Vitesses: deux types de conditions aux limites sont imposées pour les vitesses sur les parois et étant donné la complexité du maillage, elles s'expriment différemment:

$$\text{plancher: } u_w + 1/2, i = -u_w - 1/2, i$$

$$v_w = 0$$

mur de gauche:

$$u_w = 0$$

$$v_{j,w-1/2} = -v_{j,w+1/2}$$

mur de droite:

$$u_w = 0$$

$$v_{j,w+1/2} = -v_{j,w-1/2}$$

plafond: vitesse horizontale imposée à $U = 1$

$$u_w - 1/2, i = 2U - u_w + 1/2, i$$

$$v_w = 0$$

Pression:

La condition aux limites imposée dans toutes les directions est celle de gradient nul.

Fonction de courant:

Étant donné qu'il s'agit d'un système fermé, la condition aux limites imposée est:

$$\psi_w = 0$$

Vorticité:

Comme la fonction de courant n'est calculée qu'à l'intérieur des limites aucune condition aux limites n'a besoin d'être imposée.

CAS NO 2: CONVECTION NATURELLE DANS UNE ENCEINTE FERMÉE ET CARRÉE

Dans ce problème, l'écoulement de l'air est induit seulement par les températures différentes des murs de gauche et de droite.

Les mêmes conditions aux limites que pour le cas no 1 s'appliquent donc à toutes les variables sauf pour la vitesse horizontale au plafond qui est imposée nulle:

$$u_w - 1/2, i = -u_w + 1/2, i$$

De plus, il faut des conditions aux limites pour la température. Au plafond et au plancher on impose un gradient nul de température. Au mur de gauche on fixe la température adimensionnelle:

$$T = 1$$

Sur le mur de droite on fixe:

$$T = -1$$

CAS NO 3: CONVECTION NATURELLE ET FORCÉE DANS UNE ENCEINTE OUVERTE

Dans ce problème de la deuxième géométrie, l'écoulement est causé par le passage de l'air à travers l'enceinte et par les panaches de chaleur au-dessus des sources chaudes.

Vitesses:

Sur toutes les parois, la condition aux limites de vitesse nulle est imposée. Dans les trois entrées, on impose la vitesse horizontale nulle et la vitesse verticale égale à:

$$v_{j+1/2,i} = 1$$

Cette vitesse correspond à une vitesse de 0.23 m/s, mesurée lors des essais expérimentaux sur la maquette. Il en résulte un débit de sortie de 0.0085 m³/s.

Pression:

La condition de gradient nul est imposée à toutes les parois. Dans les entrées et à la sortie, la pression adimensionnelle a été spécifiée comme suit:

entrée: $P = -0,9$

sortie: $P = -10,21$

Température:

Les conditions aux limites de températures sont imposées de différentes façons:

sur les parois, on considère une isolation parfaite qui se traduit par:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

dans les entrées, on impose la température de référence adimensionnelle:

$T = 0$ (20°C)

la température adimensionnelle des surfaces chaudes étant fixée à:

$T = 1$ (140°C)

Par contre, pour limiter le taux de transfert de chaleur, la chaleur requise est générée par les éléments différentiels situés près des surfaces chaudes, qui sont considérées comme parfaitement isolées. La chaleur fournie à chaque cuve est de 68 Watts. Cette technique a permis d'obvier à la difficulté de simuler le transfert de chaleur sur les surfaces chaudes par convection avec un maillage grossier (Dupuis et al., 1985).

Finalement à la sortie, on impose un gradient nul dans la direction verticale.

Fonction de courant:

Deux types de conditions aux limites de fonction de courant sont imposées. Sur les parois, les valeurs de fonction de courant aux parois sont imposées afin de respecter les débits d'air mesurés expérimentalement. Dans les entrées cette valeur varie linéairement en fonction du débit:

$$\psi_2 = \psi_1 + v \Delta X$$

où v est la vitesse verticale d'entrée. À la sortie du canal, un gradient nul de fonction de courant a été fixé par l'équation ci-dessous:

$$\frac{d\psi}{dy} = 0$$

En choisissant l'axe vertical de symétrie comme point de

13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	14	14
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	1	1
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	1	1
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	1	1	1
13	13	13	13	13	13	13	13	13	1	1	1	1	1	1
13	13	13	13	13	13	13	13	13	1	1	1	1	1	1
13	13	13	13	13	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	13	13	13	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	13	13	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	13	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	10	10	10	10	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	10	10	10	10	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	10	10	10	10	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	10	10	10	10	1	1	1	1	1
13	13	13	13	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Légende:

1	Fonction de courant non-imposée
10	Fonction de courant imposée
13	Fonction de courant imposée
14	Gradient nul dans la direction y

Figure 2 — Matrice-test pour la fonction de courant: géométrie no 2.

référence où $\psi = 0$, on peut déterminer la valeur de la fonction de courant en tous points aux parois. Pour pouvoir travailler efficacement avec ces nombreuses conditions aux limites dans des géométries complexes, une technique a été mise au point afin de simplifier la programmation. La technique consiste à créer, pour un problème donné, des matrices de chiffres pour chaque variable, soit les vitesses u et v , la pression, la température et la fonction de courant (celle utilisée pour la vorticité est la même que celle pour la fonction de courant). Ces matrices, appelées matrices-tests, permettent au programme d'identifier dans le domaine, les opérations à effectuer. Le programme peut ainsi principalement identifier les points hors du domaine et les points où il faut imposer les conditions aux limites. À la figure 2, la matrice-test de fonction de courant du cas no 3 est présentée. On peut y voir le domaine de calcul (valeur 1), les points imposés pour respecter les débits

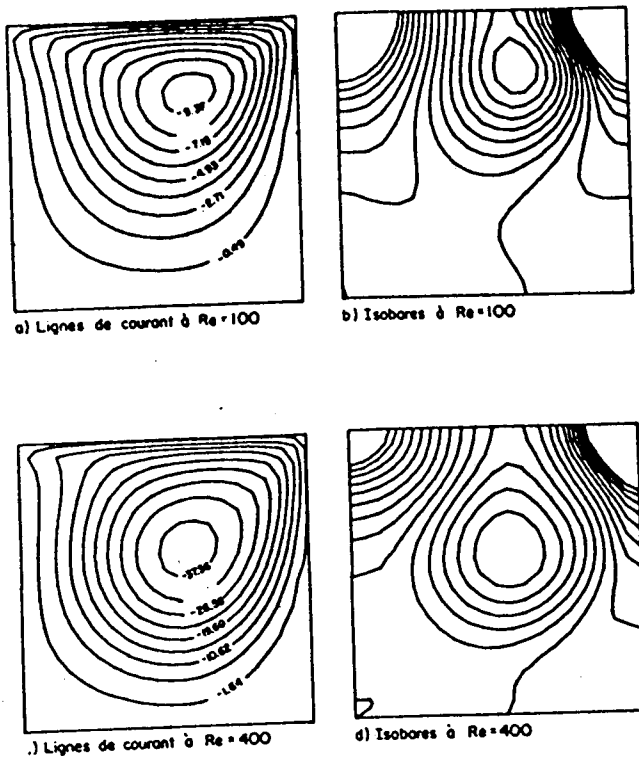


Figure 3 — Simulation mathématique de l'enceinte fermée en convection forcée: ligne de courant et isobares pour un nombre de Reynolds de 100 et 400 à l'équilibre.

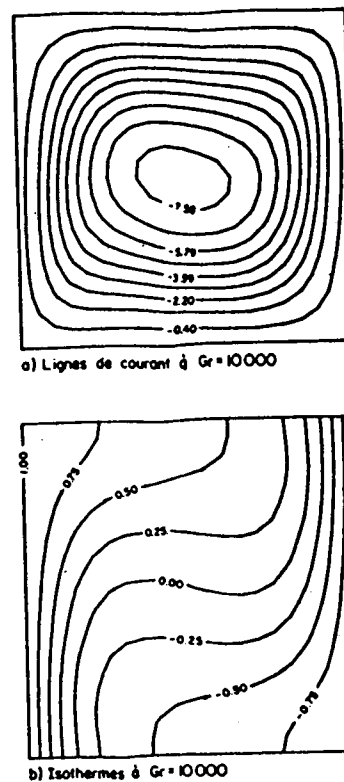


Figure 5 — Simulation mathématique de la cavité fermée en convection naturelle à $Gr = 10000$: solution à l'équilibre pour les lignes de courant (a) et la température (b).

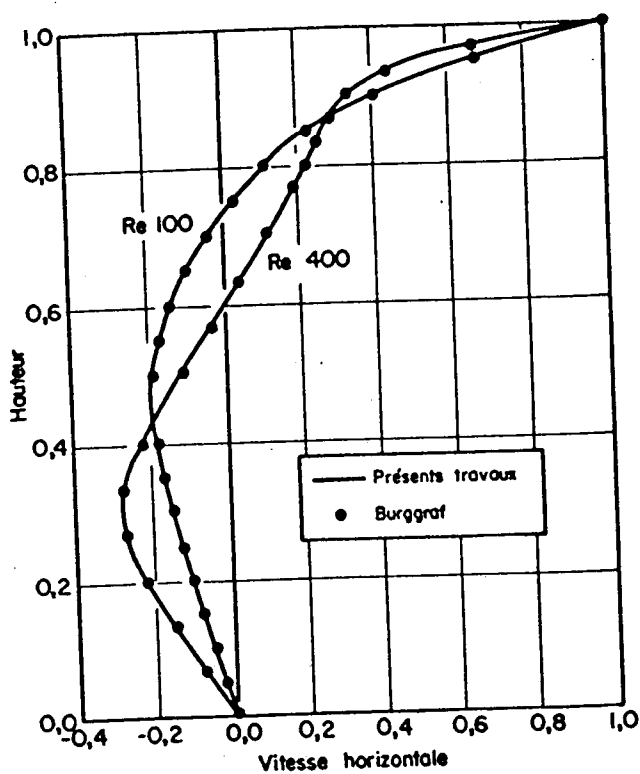


Figure 4 — Comparaison du profil de vitesse horizontale au centre de la cavité ($x = 0,5$) avec des profils acceptés.

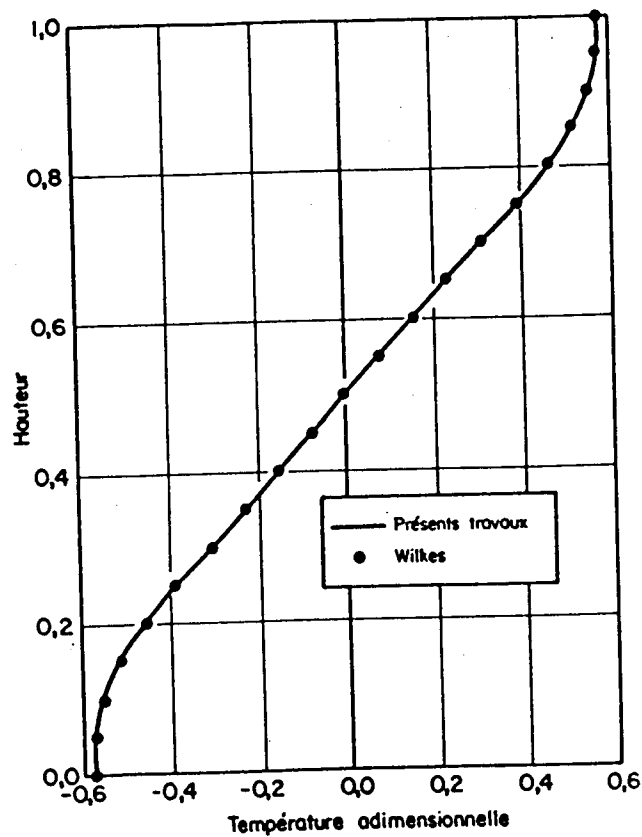


Figure 6 — Comparaison du profil de température au centre de la cavité ($x = 0,5$) avec un profil accepté.

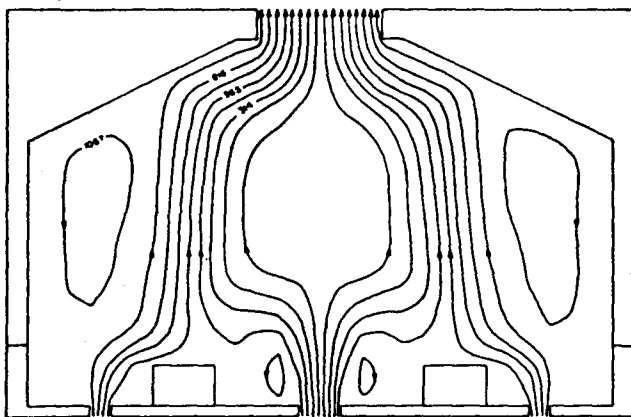


Figure 7 — Cas 3: lignes de courant expérimentales pour le problème de convection naturelle et forcée en enceinte ouverte.

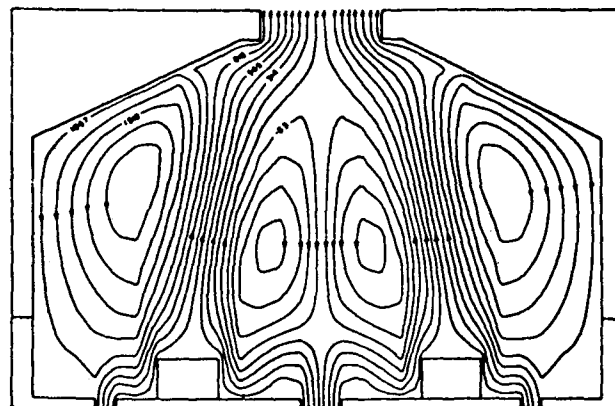


Figure 9 — Cas 3: lignes de courant obtenues par simulation mathématique sans modèle de turbulence.

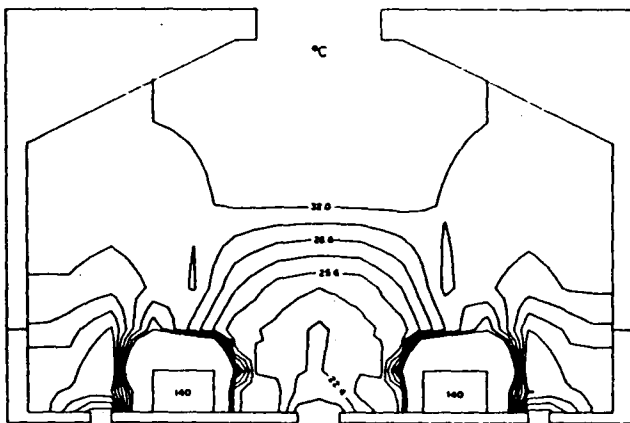


Figure 8 — Cas 3: isothermes expérimentales pour le problème de convection naturelle et forcée en enceinte ouverte.

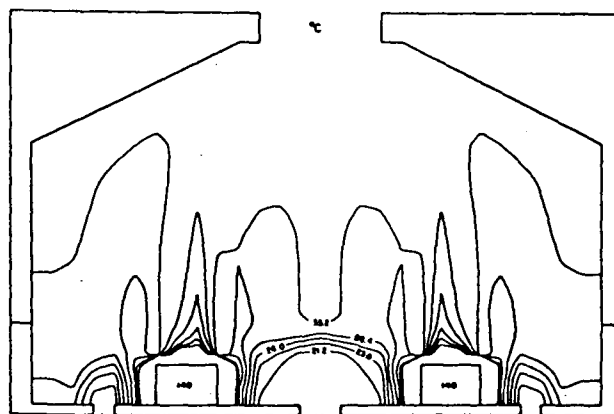


Figure 10 — Cas 3: isothermes obtenues par simulation mathématique sans modèle de turbulence.

d'entrée d'air (valeurs 10 et 13) et les points où un gradient nul de fonction de courant (direction y) est imposé (valeur 14). Cette technique permet aussi de diminuer le coût d'exécution de la méthode SOR en identifiant facilement les points hors du domaine de calcul. De plus, sans aucune modification au programme, on peut traiter des géométries complexes de façon rapide.

Résultats

Les résultats sont présentés en deux étapes. Dans un premier temps, la méthode LUMAC a été utilisée pour résoudre des problèmes typiques rencontrés dans la littérature. Ensuite la méthode a été appliquée à un problème d'intérêt industriel et comparée aux résultats expérimentaux.

COMPARAISON À LA LITTÉRATURE: (CAS NO 1 ET NO 2)

Pour les problèmes de convection forcée et de convection naturelle dans une enceinte fermée aucune différenciation à l'amont et aucun modèle de turbulence n'ont été utilisés étant donné la nature peu convective de ces problèmes.

Pour le problème de convection forcée, un maillage de 21×21 ($\Delta x = \Delta y = 0,05$) a été utilisé au nombre de Reynolds de 100, tandis qu'à un nombre de Reynolds de 400, un maillage plus fin de 31×31 ($\Delta x = \Delta y = 0,033$) a été choisi pour augmenter la précision. Les solutions de lignes de courant et d'isobares pour le problème de convection

forcée en enceinte fermée sont présentées à la figure 3 pour des nombres de Reynolds de 100 (a et b) et 400 (c et d). Les profils de vitesse horizontale au centre de l'enceinte obtenus dans ces travaux sont comparés à ceux obtenus par Burggraff (1966) à la figure 4.

Pour le problème de convection naturelle, le maillage de 21×21 a été utilisé. Les solutions de lignes de courant et les isothermes obtenues à l'équilibre pour un nombre de Grashof de 10000 sont présentées à la figure 5.

La figure 6 nous permet de comparer les températures au centre de l'enceinte obtenues dans les présents travaux avec ceux de Wilkes et Churchill (1963).

Les solutions obtenues pour ces deux problèmes nous permettent donc d'affirmer que la méthode LUMAC permet de solutionner de façon précise des problèmes de convection naturelle et forcée à des nombres de Reynolds et d'Archimède peu élevés.

APPLICATION À UN PROBLÈME INDUSTRIEL: (CAS NO 3)

À la suite de ces résultats positifs, la méthode a été appliquée à un problème d'intérêt industriel, soit un écoulement turbulent avec convection naturelle et forcée dans une géométrie complexe. Ce cas a été traité avec un maillage de 29×39 ($\Delta x = 0,0357$; $\Delta y = 0,0170$) en compromis de la précision et du temps de calcul désirés. Le temps CPU requis pour obtenir ces résultats est d'environ 1 h 30 sur un IBM 4341.

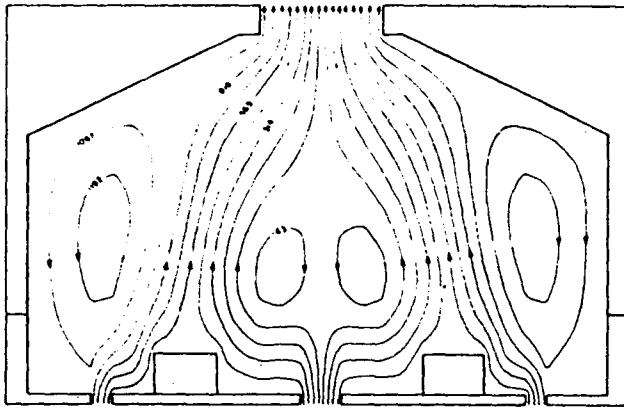


Figure 11 — Cas 3: lignes de courant obtenues par simulation mathématique avec modèle de turbulence.

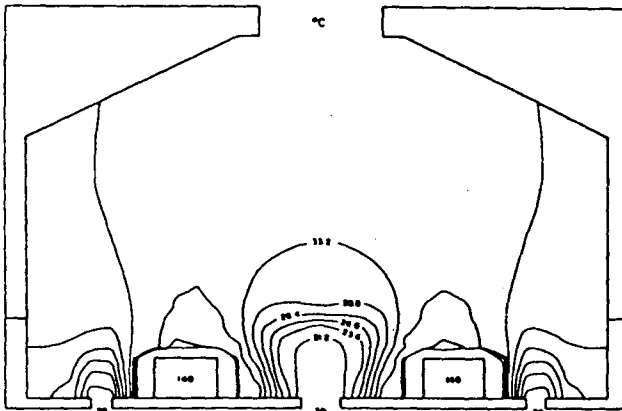


Figure 12 — Cas 3: isothermes obtenues par simulation mathématique avec modèle de turbulence.

Une méthode de différenciation à l'amont a été introduite car étant donné la nature convective de l'écoulement, l'emploi de différences centrées rendait le schéma numérique instable. La méthode du "Donnor cell" a été choisie car elle est conservative et respecte le bilan d'énergie sur chaque élément. De plus, le modèle de turbulence décrit précédemment a été employé. La valeur de $\delta_{u,v}$ a été fixée à 0,00457, tandis que la valeur de δ_T a été fixée à $3,87 \times 10^{-5}$ pour le cas étudié.

Afin de nous permettre de comparer les résultats numériques, des vitesses ont été mesurées dans une maquette avec un anémomètre à fil chaud (DISA modèle 55K01/55K14). Les lignes de courant correspondantes ont été tracées. Il faut cependant noter que la précision des mesures est limitée quand les vitesses mesurées étaient inférieures à 0,08 m/s, mais la précision était d'environ 3% à des vitesses plus grandes. De plus, étant donné la turbulence, la fluctuation de vitesse rendait la mesure plus difficile. L'interprétation qui se dégage des mesures expérimentales sera donc quantitative et qualitative étant donné que plusieurs mesures étaient inférieures à 0,08 m/s.

À la figure 7 on voit les conditions de circulation obtenues dans la maquette lorsque les cuves dégagent de la chaleur. Les nombres adimensionnels étaient les suivants: $Re = 14067$, $Ar = 67,81$ et $Gr = 1,34 \times 10^{10}$. Les constatations importantes sont les suivantes:

- Le jet central se divise en deux parties qui se dirigent chacune vers les cuves.
- Les jets latéraux sont aspirés vers les cuves.

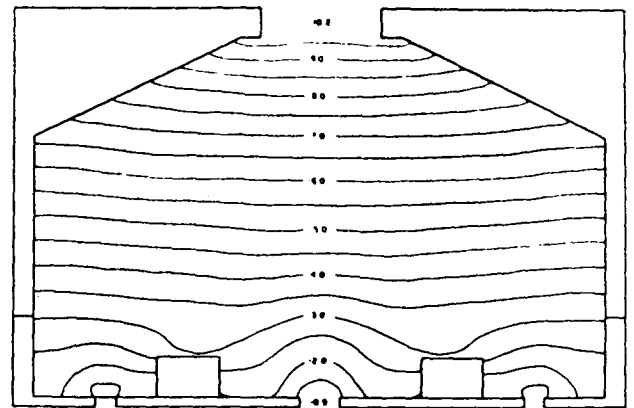


Figure 13 — Cas 3: isobares obtenues par la simulation mathématique sans modèle de turbulence.

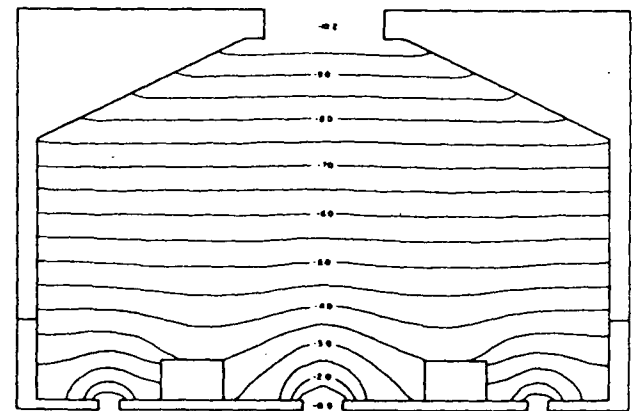


Figure 14 — Cas 3: isobares obtenues par la simulation mathématique avec le modèle de turbulence.

— Au-dessus des cuves, un courant d'air chaud monte à environ 0,13 m/s puis se sépare en deux parties, l'une vers la sortie et l'autre redescend au plancher près des murs à environ 0,02 m/s.

— Les courants d'air chaud génèrent 4 boucles de recirculation, dont deux de faible dimension au centre, avec une vitesse descendante d'environ 0,02 m/s.

La figure 8 nous montre les isothermes expérimentales correspondantes. On peut remarquer que la température est assez uniforme dans le haut de la salle et qu'on observe un fort gradient tout autour des cuves.

Les figures 9 et 10 présentent les résultats de la simulation mathématique sans modèle de turbulence. Si on compare ces résultats avec ceux obtenus avec la maquette on peut voir des différences importantes:

— Le jet du centre ainsi que les jets latéraux se dirigent beaucoup plus vite vers les cuves.

— Le courant d'air chaud monte au-dessus des cuves avec une vitesse de 0,21 m/s comparativement à une vitesse expérimentale de 0,13 m/s.

— Les quatre recirculations sont plus importantes et tournent plus rapidement. Les recirculations du centre descendent à 0,14 m/s au lieu de 0,02 m/s, tandis que près des murs les recirculations descendent à 0,08 m/s au lieu de 0,02 m/s.

— Le gradient de température est plus fort dans l'entrée centrale et le haut de la salle est plus chaud que dans la maquette.

Lorsqu'on introduit un modèle de turbulence, on peut voir que la solution mathématique s'approche de la solution expérimentale. Aux figures 11 et 12 on peut observer les point

suivants:

— Le courant d'air chaud qui monte au-dessus des cuves a une vitesse simulée de 0,11 m/s, cette valeur s'approche de la valeur expérimentale qui est égale à 0,13 m/s.

— Les quatre recirculations tournent moins rapidement que dans le cas précédent: celles du centre descendent à 0,037 m/s et celles du côté descendent le long du mur à 0,041 m/s. On peut voir que les deux recirculations du centre sont encore trop rapides comparativement aux résultats expérimentaux.

— La valeur du gradient de température près du plancher s'approche de celle observée à la figure 8.

— Le panache de chaleur au-dessus des cuves est légèrement plus faible.

La formulation u, v, p calcule également la pression dans l'enceinte et ces résultats sont représentés à la figure 13 sans modèle de turbulence et à la figure 14 avec le modèle de turbulence. On constate que la pression dans l'enceinte demeure une pression statique, laquelle varie avec la hauteur. Les pressions au-dessus des cuves sont affectées très légèrement seulement, confirmant ainsi que les vitesses d'écoulement dans l'enceinte sont trop faibles pour influencer la pression statique.

Conclusion

La méthode proposée dans ce travail permet de résoudre l'équation de Navier-Stokes pour des problèmes fortement convectifs. Cette méthode permet d'utiliser la formulation u, v, p et d'imposer la contrainte d'incompressibilité à l'aide de la formulation $\psi-\omega$, sans toutefois avoir à évaluer la vorticité aux limites. Elle s'est avérée aussi précise que la formulation $\psi-\omega$ pour tous les cas étudiés.

Son principal inconvénient réside cependant dans un temps d'exécution plus élevé. Étant donné la résolution de deux systèmes d'équations par la méthode SOR, la méthode LUMAC s'est avérée près de deux fois plus coûteuse que la formulation $\psi-\omega$.

Les isobares dans l'enceinte ouverte confirment qu'il existe une zone neutre où la pression est égale à la pression extérieure. À partir de cette zone, plusieurs auteurs ont développé des méthodes pour calculer le débit de la ventilation de l'air causée par la convection naturelle dans une bâtisse industrielle (Kreichelt et al., 1976). Cette étude confirme l'approche de la méthode ASHRAE, laquelle est la plus répandue, tout en y ajoutant une évaluation de la circulation et de la température à l'intérieur de l'enceinte.

Nomenclature

Ar = nombre d'Archimède ($Gr/Re^2 = g \beta d \Delta T / V^*{}^2$)
 C_p = chaleur spécifique de l'air, kJ/kg · °C
 d = largeur de l'enceinte, m
 D_i = divergence adimensionnelle
 F = coefficient de surrelaxation de la méthode SOR
 g = accélération gravitationnelle, 9,81 m/s²
 Gr = nombre de Grashof ($g \beta \Delta T d^3 / \nu_o^2$)
 k = coefficient de transfert de chaleur de l'air, W/m² · °C
 P = pression adimensionnelle ($(P^* - P_o) / \rho V^*{}^2$)
 Pr = nombre de Prandtl, ($C_p \mu / k$)
 R = carré du rapport hauteur sur largeur de l'élément différentiel ($\Delta y^2 / \Delta x^2$)
 Re = nombre de Reynolds ($d V^* / \nu_o$)
 Sp = second membre de l'équation de Poisson pour la pression

T = température adimensionnelle ($T^* / \Delta T$)
 T_o = température adimensionnelle de référence ($T_o^* / \Delta T$)
 u = vitesse horizontale adimensionnelle (u^* / U^*)
 U = vitesse horizontale adimensionnelle imposée
 v = vitesse verticale adimensionnelle (v^* / V^*)
 V = vitesse verticale adimensionnelle imposée
 x = abscisse adimensionnelle
 y = ordonnée adimensionnelle

Symboles grecs

β = coefficient d'expansion thermique, K⁻¹
 $\delta_{u,v}$ = longueur de mélange adimensionnelle pour la turbulence causée par les vitesses
 δ_T = longueur de mélange adimensionnelle pour la turbulence causée par la température
 Φ = quantité convectée
 Δx = largeur adimensionnelle de l'élément différentiel
 Δy = longueur adimensionnelle de l'élément différentiel
 ΔT = écart maximum de température ($T^* - T_o^*$)
 μ = viscosité de l'air, kg/m · s
 ν = viscosité cinématique de l'air, m²/s
 θ = temps adimensionnel
 ψ = fonction de courant adimensionnelle
 ω = vorticité adimensionnelle

Indices

e = effective (laminaire et turbulente)
 i = colonnes pour les éléments différentiels
 j = lignes pour les éléments différentiels
 o = laminaire
 x = direction horizontale
 y = direction verticale
 w = sur le mur

Exposants

* = avec dimension

References

- Agregbesola, Y. A. S. et D. M. Burley, "The Vector and Scalar Potential Method for the Numerical Solution of Two and Three-Dimensional Navier-Stokes Equations", *J. of Computational Physics* **24**, 398-415 (1977).
- Amsden, A. A. et F. H. Harlow, "The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows", Los Alamos Scientific Laboratory, New Mexico (1970).
- Burggraaf, O. R., "Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows", *J. Fluids Mech.* **24**, 113-151 (1966).
- Dupuis, M., J.-C. Méthot et E. Darnedde, "Simulation mathématique de la circulation de l'air dans une enceinte avec ouvertures et sources chaudes localisées", *Can. J. Chem. Eng.* **63**, 155-161 (1985).
- Harlow, F. H. et J. E. Welch, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free-Surface", *The Physics of Fluids* **8**, 2182-2189 (1965).
- Kreichelt, T. E., G. R. Kern and F. B. Higgins, "Natural Ventilation in Hot Process Buildings in the Steel Industry", *Iron and Steel Engineer* **53**, 39-46 (December 1976).
- Roache, P. J., "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publishers (1982).
- Spalding, D. B. et N. Afgan, "Heat Transfer and Turbulent Buoyant Convection", tiré de "Accuracy of the Finite Difference Computation of Free Convection", Hemisphere Publishing Corporation (1977), pp. 802-812.

Todd, M. R., "Transient Natural Convection in Confined Two Phase Systems", Thèse de doctorat, State University of New York (1969).

Torrance, K. E. et J. A. Rockett, "Numerical Study of Natural Convection in an Enclosure with Localized Heating from Below — Creeping Flow to the Onset of Laminar Instability", *J. Fluid Mech.* 36, 33-54 (1969).

Wilkes, J. O., "The Finite Difference Computation of Natural Con-

vection in an Enclosed Rectangular Cavity", Thèse de doctorat, University of Michigan (1963).

Manuscript received August 16, 1985; revised manuscript received December 2, 1986; accepted for publication December 3, 1986.